Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto -\frac{27}{5000}x^4 + \frac{27}{100}x^2 - \frac{19}{8}$.

Zwischen den äußeren Nullstellen beschreibt der Graph den Querschnitt eines Kanals (x und f(x) in Meter), außerhalb dieses Bereichs beschreibt die x-Achse den Querschnitt des Geländes.

a) Wie tief ist der Kanal an seiner tiefsten Stelle, wenn die Wasseroberfläche 4 m breit ist ?

b) In welcher Höhe ist die Aufschüttung des Kanals 1,5 m breit ?

c) In einer Trockenperiode ist der Kanal völlig leer. Von welcher Stelle aus kann man aus 3 m Höhe die tiefste Stelle des Kanals sehen?

d) An der Stelle x = 8 soll ein Turm gebaut werden. Wie hoch muss dieser Turm mindestens sein, damit man jede Stelle im Innern des Kanals einsehen kann?

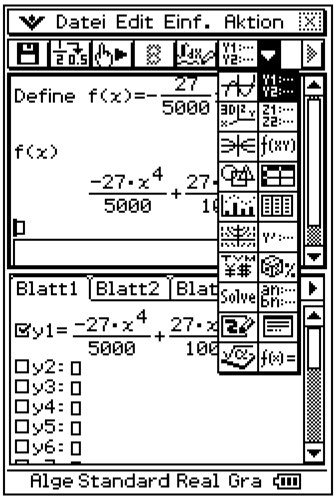
e) Nach einer Regenwoche kann eine Person mit 1,7 m Augenhöhe, die bei x = 9 steht, gerade den linken Rand des Wassers sehen. Wie tief ist dann der Kanal ?

f) Welcher Punkt des Graphen der Funktion f hat die kleinste Entfernung vom Punkt P(2 | 3)? Wie groß ist diese Entfernung?

Im Hauptmenü des ClassPad wählt man das Icon eActivity, um eine eActivity zu eröffnen.

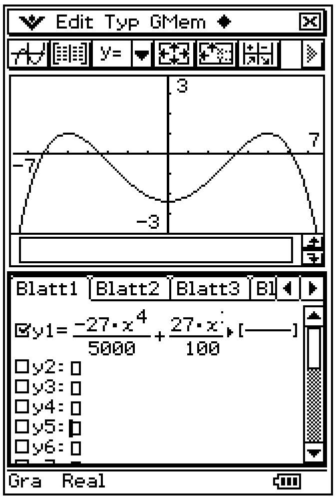
In der eActivity-Anwendung muss man gegebenenfalls mit **Datei / Neu** eine neue eActivity erzeugen.

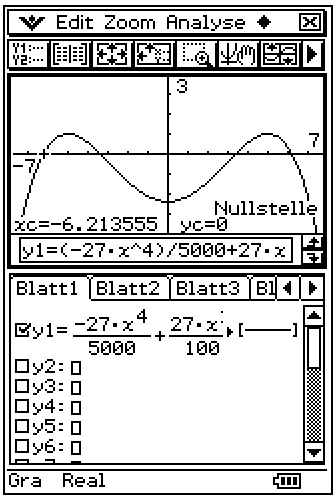
Tipp man auf das Icon , so wechselt man vom Text- in den Rechen-Modus.



Zunächst wird die Funktion definiert; dann lässt man sich den Funktionsterm ausgeben und kann kontrollieren, ob der Term richtig eingetippt wurde.
Damit man sich vorstellen kann, wovon die Aufgabe handelt, ist es sinnvoll, den Graphen zu erzeugen. Dazu öffnet man mit gemäß der nebenstehenden Abbildung den Funktionen-Editor und kopiert den Funktionsterm in die Funktionsvariabel y1.

Mit wird der Graph gezeichnet.

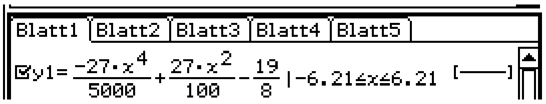




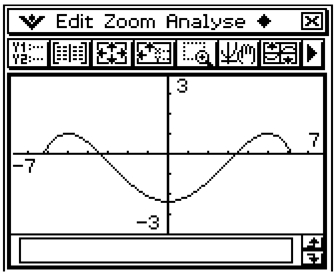
Nach der Aufgabenstellung beschreibt nur der Graph zwischen den äußeren Nullstellen das Profil des Kanals. Mit Analyse / Grafische Lösung wird eine Nullstelle näherungsweise bestimmt.

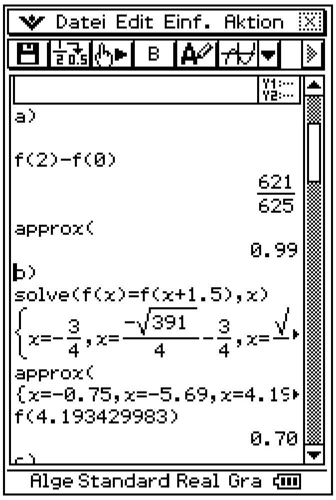
Wegen der Symmetrie zur y-Achse beschreibt der Graph für $-6{,}21 \le x \le +6{,}21$ das Profil des Kanals.

Dies kann man in der Definition der Funktionsvariablen y1 berücksichtigen:



Man erhält dann den nebenstehenden Graphen.





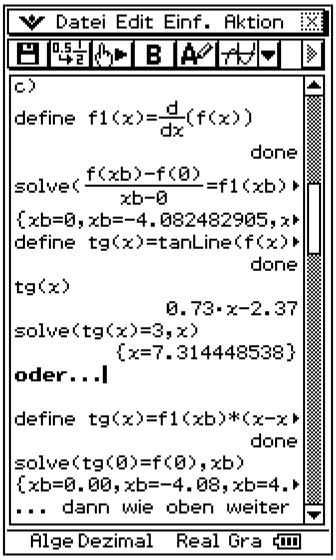
a) Wegen der Symmetrie ist der Punkt P(2 | …) des Graphen das rechte Kanalufer. Die Höhendifferenz zum Tiefpunkt T(0 | …) ist die Tiefe des Kanals.

b) Gesucht ist eine Stelle x mit f(x) = f(x+1.5).

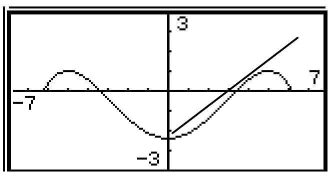
Mit dem CAS erhält man drei Lösungen dieser Gleichung.

Die Lösung x = 4,19 ist für das Problem die relevante Lösung.

Der Funktionswert dieser Stelle ist die gesuchte Höhe, also Höhe = 0,70 m



c) Statt dass man in den Kanal schaut, kann man auch eine Frosch von der tiefsten Stelle des Kanals nach außen schauen lassen: Außentangente.



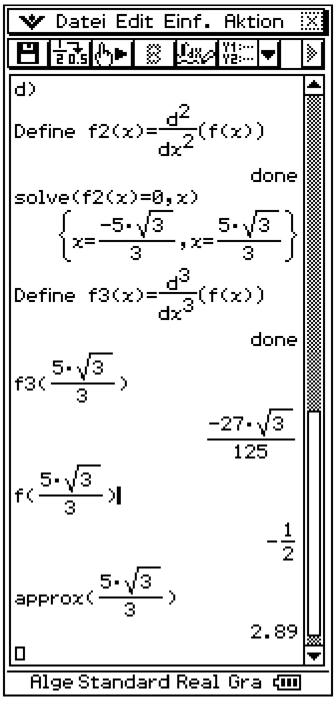
Für die Berührstelle der gesuchten Tangenten muss gelten: $\frac{f(xb)-f(0)}{xb-0} = f'(xb)$

Man erhält als relevante Lösung $xb \approx 4{,}08$

Tangente an dieser Stelle: y = 0,73x – 2,73

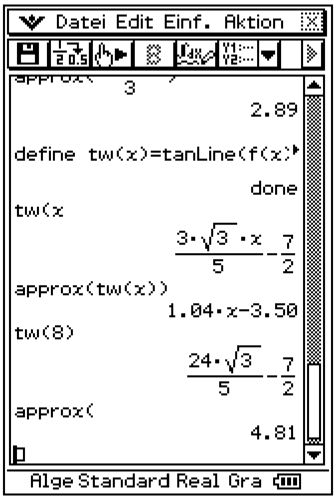
Der Tangentenpunkt mit x = 7,31 ist 3 m über dem Boden.

Oder… man definiert allgemein die Tangente und macht eine Punktprobe zur Bestimmung von xb.



d) Wenn man entlang der Wendetangente sehen kann, kann man jede Stelle des Kanals einsehen.

$\Rightarrow\ W\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\,|\,-\frac{1}{2}\right) \approx W(\,2{,}89\,|\,-0.5)$

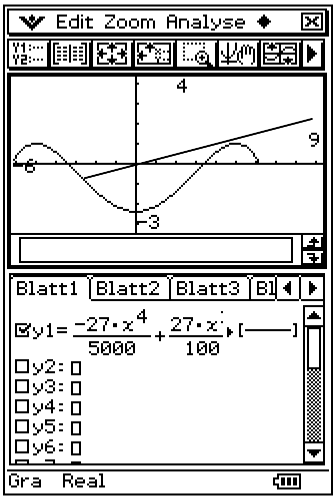


Die Wendetangente hat die Gleichung $y = \frac{3\sqrt{3}}{5}x - \frac{7}{2}$ bzw. $y \approx 1{,}04x - 3{,}5$

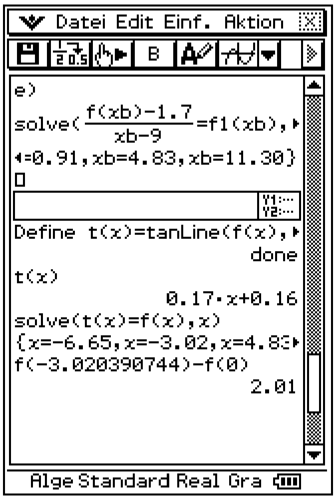
Der Punkt mit der x-Koordinate x = 8 hat ungefähr die Höhe 4,81.

Der Turm muss also mindestens 4,81 m hoch sein.

e) Außentangente vom Punkt P(9 | 1,7) aus.



Für die Berührstelle der gesuchten Tangenten muss gelten: $\frac{f(xb)-1{,}7}{xb-9} = f'(xb)$



CAS liefert vier Lösungen für xb; relevante Lösung xb ≈ 4,83

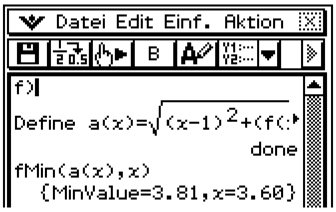
Die Tangente an der Berührstelle hat die Gleichung $y = 0{,}17x + 0{,}16$

schneidet bei x ≈ -3,02 den Kanal.

Die Tiefe des Kanals erhält man als Höhendifferenz des Punktes P(- 3,02 | …) und des Tiefpunktes.

Damit ist der Kanal 2,01 m tief.

f) Man definiert die Abstandsfunktion a(x) und versucht zunächst mit dem fMin-Befehl das Minimum zu finden.



Der Punkt mit der x-Koordinate 3,60 hat die kleinste Entfernung, nämlich 3,81.

Falls der fMin-Befehl nicht klappt, sucht man im Graphen der Abstandsfunktion mit der grafischen Analyse das Minimum.